Интеграбле инитиал боундары валуе проблемс

И.Т.Хабибуллин (Уфа Институте оф Матхематицс)

Цонсидер тхе ИБВ проблем оф тхе генерал форм фор тхе НЛС ечуатион

$$iq_t = q_{xx} + c|q|^2 q, \quad x > 0,\, t > 0, \tag{1}$$

$$a_1 q_x + a_2 q|_{x=0} = f(t), \tag{2}$$

$$q|_{t=0} = q_0(x), \quad q_0(x)|_{x\to+\infty} \to 0, \tag{3}$$

щхич щас студиед бы маны аутхорс. Тхе усуал сцаттеринг матриш $s(\lambda, t)$ оф тхе цорреспондинг Дирац оператор он тхе халф-лине $x > 0$ депендс он t ин а веры имплицит щаы. Намелы, ит сатисфиес тхе фоллощинг матриш ечуатион

$$s_t = 2i\lambda^2[s, \sigma_3] + Z(q(0,t), q_x(0,t), \lambda)s. \tag{4}$$

Ечуатион цонтаинс ункнощнс s, q анд q_x. Хощ то студы суч кинд оф ечуатионс ? Ат тхе фирст гланце ит цонтаинс ан ештра ункнощн анд ит ис ундер-детерминед. Бут соме имплицит речуиремент шоулд бе валид : $s(\lambda, t)$ пресервес иц аналытицал пропертиес он тхе уппер анд лощер халф планес $Im\lambda > 0$ анд $Im\lambda < 0$. Со реаллы тхе ечуатион ис цоррецтлы дефинед.

Дифферент аппроачес то студы тхе ечуатион (4) аре дисцуссед ин тхе литературе, фор инстанце, рецентлы щере пропосед тхе глобал релатион метход (Фокас) анд тхе елиминатион бы рестрицтион метход (Дегасперис, Манаков, Сантини). Тхе фоллощинг ресулт аллощс то ундерстанд тхе ессенце оф тхе проблем (1), (2), (3).

Тхеорем, [1]. Тхе ентриес α, β оф тхе сцаттеринг матриш $s(\lambda, t)$ сатисфы тхе фоллощинг сыстем оф ечуатионс

$$\alpha_t(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{k' - k - i0} F_1(\alpha(k',t), \beta(k',t), f(t)) \tag{5}$$

$$\beta_t(k,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk'}{k'-k-i0}F_2(\alpha(k',t),\beta(k',t),f(t)) \tag{6}$$

Генераллы тхис сыстем оф ечуатионс щитх тхе вариабле цоеффициенц ис нонлинеар (F_1, F_2 – аре сецонд дегрее полыномиалс), ит ис интеграбле онлы иф $f(t)\equiv 0$. Тхус, тхе ИБВ проблем ис ечуивалент то тхе Цаучы проблем фор а псеудодифферентиал ечуатион щитх тщо индепендент вариаблес (генераллы нонинтеграбле). Интеграбилиты ис лост щхен $f(t)\neq 0$. Онлы ин тхе хомогенеоус цасе тхе ДМС ечуатион ис интеграбле (ит бецомес линеар). Тхе ИБВ проблем фор $f(t)\equiv 0$ ис студиед ин детаилс (М.Аблощитз, Х.Сегур 1975 щхен $a_1=0$ ор $a_2=0$ анд Р.Бикбаев, В.Тарасов, И.Хабибуллин 1990-91 иф $a_1a_2\neq 0$). Ит адмиц солитон солутионс. Тхе асымптотицс фор тхе ларге валуес оф тиме аре обтаинед фор ан арбитрары инитиал валуе.

Иф $f(t)$ ис нот идентицаллы зеро тхен но хопе то финд ешацт солутионс то тхе ИБВ проблем. Оне оф тхе щаыс хере ис то интродуце а смалл параметер $0<\epsilon\to 0$, и.е. реплаце $f(t)$ бы $\epsilon f(t)$ анд то студы тхе инфлуенце оф тхе боундары бы усинг тхе аппропириателы девелопед пертурбатион тхеоры.

То ештрацт интеграбле цасес оне цан апплы тхе интеграбилиты тест то тхе сыстем фор тхе сцаттеринг матриш лике (5)-(6). Бут ще щилл тестифы тхе боундары цондитион усинг дирецтлы тхе Лаш паир. Суппосе тхе ечуатион

$$q_t=f(q,q_x,q_{xx},...) \tag{7}$$

адмиц тхе Лаш паир оф тхе форм

$$\psi_x=U(q,\lambda)\psi,\quad \psi_t=V(q,q_x,...\lambda)\psi \tag{8}$$

Лет а боундары цондитион оф тхе форм

$$F(t,q,q_x,...)=0 \tag{9}$$

ис импосед ат тхе поинт $x=0$. Субституте тхе БЦ (9) инто тхе сецонд ечуатион ин $(8): W([q],t,\lambda)=V(q,q_x,...\lambda)|_{F(t,q,q_x,...)=0}$ анд финд

$$\psi_t=W([q],t,\lambda)\psi \tag{10}$$

алонг тхе лине $x=0$

Тхе БЦ (9) ис цонсистент щитх тхе Лаш паир (8) иф тхе линеар ечуатион (10) адмиц ан аддитионал дисцрете сымметры суч тхат тхере ешисц а

матриш валуед фунцтион $H([q],t,\lambda)$ анд ан инволутион $h=h(\lambda)$ суч тхат тхе трансформатион $\psi\to\bar\psi=H\psi$ цонверц а солутион ψ оф тхе ечуатион (10) инто а солутион. Ин термс оф тхе потентиалс тхис речуиремент реадс ас

$$H_t(\lambda)=W(\lambda)H(\lambda)-H(\lambda)W(h(\lambda)) \tag{11}$$

Ешампле 1, сее [2]. Цонсидер тхе Кортещег-де Вриес ечуатион $u_t=u_{xxx}-6uu_x$. Тхе цоеффициент матрицес фор тхе Лаш паир аре дефинед ас

$$U=\begin{pmatrix}0 & 1\\ u-\lambda & 0\end{pmatrix},$$

$$V=\begin{pmatrix}u_x & -4\lambda-2u\\ u_{xx}-(4\lambda+2u)(u-\lambda) & -u_x\end{pmatrix}.$$

Суппосе тхе БЦ импосед ат $x=0$ ис оф тхе форм

$$u=F_1(u_x,t),\quad u_{xx}=F_2(u_x,t).$$

То лоок фор тхе дисцрете сымметры ще муст солве тхе ечуатион

$$\frac{dH}{dt}=\begin{pmatrix}F_1 & -4\lambda-2u\\ F_2-(4\lambda+2u)(u-\lambda) & -F_1\end{pmatrix}H-$$

$$-H\begin{pmatrix}F_1 & -4h(\lambda)-2u\\ F_2-(4h(\lambda)+2u)(u-h(\lambda)) & -F_1\end{pmatrix}$$

Хере ункнощнс F_1, F_2, $H=H(u,u_x,u_{xx},...)$, $h=h(\lambda)$ аре уничуелы фоунд. Тхе ансщер ис

$$H=\begin{pmatrix}2\lambda+a & 0\\ 0 & a-\lambda+\sqrt{3a^2-b-3\lambda^2}\end{pmatrix},$$

$$h(\lambda)=\frac{-\lambda+\sqrt{3a^2-b-3\lambda^2}}{2}.$$

Тхе БЦ ис оф тхе форм

$$u|_{x=0}=a,\quad u_{xx}|_{x=0}=b,$$

щхере a анд b аре арбитрары цонстанц.

Ешампле 2, [2]. Тхе Харры Дым ечуатион $u_t+u^3u_{xxx}=0$ адмиц тщо киндс оф БЦ:

и) $u|_{x=0}=0, \quad u_x|_{x=0}=b,$

$$H=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{4\lambda bt} & 1 \end{pmatrix}, \quad h(\lambda)=\lambda;$$

ии) $u_x|_{x=0}=au, \quad u_{xx}|_{x=0}=a^2u/2+b/u,$

$$H=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ (\lambda-h(\lambda))a/2 & h(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$h(\lambda)=\frac{-b-2\lambda+\sqrt{b^2-4b\lambda-12\lambda^2}}{4};$$

щхере a, b аре цонстанц.

Ешампле 3, [3]. Тхе дисцрете Хеисенберг модел

$$(T_m-1)\frac{1}{q-q_{-1,0}}=(T_n-1)\frac{1}{q-q_{0,-1}}, \tag{12}$$

хас тхе фоллощинг Лаш паир

$$L=\begin{pmatrix} \lambda-\frac{q_{-1,0}}{q-q_{-1,0}} & -\frac{qq_{-1,0}}{q-q_{-1,0}} \\ \frac{1}{q-q_{-1,0}} & \lambda+\frac{q}{q-q_{-1,0}} \end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix} \lambda-\frac{q_{0,-1}}{q-q_{0,-1}} & -\frac{qq_{0,-1}}{q-q_{0,-1}} \\ \frac{1}{q-q_{0,-1}} & \lambda+\frac{q}{q-q_{0,-1}} \end{pmatrix}.$$

Ин тхис цасе тхе дисцрете инволутион анд тхе цуттинг офф цондитион аре фоунд фром тхе ечуатион

$$H(m+1,\lambda)A(m,N,\lambda)=A(m,N,h(\lambda))H(m,\lambda). \tag{13}$$

Тхе БЦ реадс ас

$$q_{m,0}=\frac{cq_{m,1}+(-1)^m a}{c+(-1)^m bq_{m,1}}, \tag{14}$$

щхере a,b,c аре арбитрары цонстанц анд $a^2+b^2\neq 0$. Тхе матриш H такес тхе форм

$$H(m,\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & (-1)^m ac(2\lambda+1) \\ (-1)^m bc(2\lambda+1) & 1 \end{pmatrix},$$

анд тхе инволутион ис $\quad h(\lambda)=-\lambda-1.$

Хощ то усе тхе дисцрете сымметры ин тхе ИСМ

Лет ус дисцусс хощ то усе тхе дисцрете сымметры щхен цонструцтинг солутионс оф тхе цорреспондинг ИБВ проблемс. Таке тхе ИБВ проблем фор тхе КдВ ечуатион щитх ванишинг БЦ (сее, [4])

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x, \quad x > 0,\ t > 0, \tag{15}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u_{xx}|_{x=0} = 0, \tag{16}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_0(x)|_{x\to+\infty} \to 0. \tag{17}$$

Ин тхис цасе H ис тхе униты матриш анд $h(\lambda) = \lambda\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \lambda\omega$. Ацтуаллы, тхе дисцрете сымметры рефлецц онлы тхе фацт тхат тхе еволутион оф тхе сцаттеринг матриш

$$s_t = 4i\lambda^3[s, \sigma_3] + u_x(0,t)\sigma_1 s \tag{18}$$

ис инвариант ундер тхе чанге $\lambda \to \omega\lambda$. Тхис ечуатион ис реаллы нонлинеар бут тхе дисцрете сымметры аллощс оне то линеаризе ит. Пут $z = \lambda^3$ анд дефине тхе матрицес

$$c_+(z,t) = (s_1(\omega\lambda, t), s_2(\lambda, t))$$

$$c_-(z,t) = \sigma_1 \bar{c}_+(\bar{z}, t)\sigma_1$$

Тхесе тщо матрицес сатисфы тхе Риеманн проблем

$$c_+(z,t) = c_-(z,t)p(z,t), \tag{19}$$

щхере $p(z,t) = e^{-4iz\sigma_3 t}p(z,0)e^{4iz\sigma_3 t}$. Нощ ит ис еасы то сее тхат тхе сцаттеринг матриш $s(\lambda,t)$ ис фоунд фром тхе линеар ечуатион (19). Усинг тхис фацт оне цан прове

Тхеорем. Лет тхе инитиал валуе сатисфы тхе цондитионс

1) $u(x,0) = u_0(x)$ ис смоотх анд ванишес;

2) тхе ассоциатед Стурм-Лиоувилле оператор хас но дисцрете еигенвалуес,

3) тхе сцаттеринг матриш ис унбоундед ат $\lambda = 0$

тхен тхе проблем (15), (16), (17) ис уничуелы солвабле фор алл $t > 0$. Тхе фунцтион $u_x(0,t)$ сатисфиес тхе фоллощинг репресентатион

$$u_x(0,t) = \frac{1}{t} + o(\frac{1}{t}), \quad t \to \infty$$

Ин тхис цасе тщо оф тхрее фунцтионс $u(0,t)$, $u_x(0,t)$, $u_{xx}(0,t)$ аре зеро анд тхе тхирд оне слощлы децаыс. Ит ис нот евер ин L_1, онлы ин L_2.

Унфортунателы, тхере ис но регулар солитон-лике солутионс оф тхе КдВ ечуатион щитх тхе ванишинг боундары цондитионс. Иф тхе параметерс a анд b аре дифферент фром зеро тхен регулар ешацт солитон-лике солутионс (ас щелл ас фините-гап солутионс) ешист аппроачинг $C = \sqrt{a^2 - b/3}$ ат $x = \infty$ анд сатисфыинг тхе БЦ ат $x = 0$. Тхеы аре десцрибед ин Адлер, Хабибуллин, Шабат 1997, ТМФ. Ин тхис цасе тиме еволутион оф тхе сцаттеринг матриш ис редуцед то а Риеманн проблем он а Риеманн сурфаце дефинед бы тхе фунцтион $h(\lambda) = \frac{-\lambda + \sqrt{3a^2 - b - 3\lambda^2}}{2}$.

Дисцрете сымметры анд БЦ ин мултидименсионал цасе

Цонсидер тхе щелл кнощн 2Д-Тода чаин

$$u_{xt}\,(n) = \exp\{u\,(n-1) - u\,(n)\} - \exp\{u\,(n) - u\,(n+1)\}, \tag{20}$$

щитх тхе фоллощинг Лаш паир

$$\phi\,(n+1) = (D_x + u_x\,(n))\,\phi\,(n)\,, \tag{21}$$

$$\phi_{xt}\,(n) = -u_x\,(n)\,\phi_t\,(n) - \exp\{u\,(n-1) - u\,(n)\}\phi\,(n)\,. \tag{22}$$

Импосе а цуттинг офф цонстраинт ат $n = 0$

$$f(u(-1), u(0)) = 0. \tag{23}$$

Хощ то финд алл интеграбле цасес онлы бы усинг тхе ечуатион (22)? То тхис енд ит ис нецессары то студы тхе дисцрете сымметриес оф тхе ечуатион (22), аппеаринг ундер тхе БЦ. Бут нощ тхере ис но λ анд ще аре то финд соме генерализатион оф тхе инволутион $\lambda \to h(\lambda)$. Ит ис евидент тхат тхе Тода чаин ис инвариант ундер трансформ $x \leftrightarrow t$, со тхе фоллощинг паир оф ечуатион

$$\psi\,(n+1) = (D_t + u_t\,(n))\,\psi\,(n)\,, \tag{24}$$

$$\psi_{xt}\,(n) = -u_t\,(n)\,\psi_x\,(n) - \exp\{u\,(n-1) - u\,(n)\}\psi\,(n)\,. \tag{25}$$

гивес алсо а Лаш паир то тхе Тода чаин.

Пропоситион, [5]. Суппосе тхат тхере ешисц суч ан оператор $M = aD_x^2 + bD_x + c$ тхат фор $n = 0$ фор аны солутион ψ оф тхе ечуатион (25)

тхе фунцтион $\phi = M\psi$ ис а солутион оф (22). Тхен тхе БЦ (23) такес оне оф тхе формс белощ

$$\begin{aligned} &1)\ \ e^{u(-1)} = 0,\\ &2)\ \ u(-1) = 0,\\ &3)\ \ u(-1) = u(0),\\ &4)\ \ u_x(-1) = -u_t(0)e^{-u(0)-u(-1)}. \end{aligned} \tag{26}$$

Тхе цорреспондинг оператор M ис респецтивелы оф тхе форм

$$\begin{aligned} &1)\ \ M_1 = a_0 e^u D_x^2 + (b_0 e^u + a_0 u_x e^u) D_x,\\ &2)\ \ M_2 = e^u D_x^2 + u_x e^u D_x,\\ &3)\ \ M_3 = e^u D_x,\\ &4)\ \ M_4 = e^u D_x^2 + u_x e^u D_x + e^{-u}. \end{aligned} \tag{27}$$

щхере a_0, b_0 – арбитрары цонстант параметерс, анд $u = u(0)$. Нотице тхат тхе оператор M_1 ис а линеар цомбинатион оф тхе операторс M_2 анд M_3.

Алл оф тхе цуттинг офф цондитионс абове аре кнощн то бе цонсистент щитх тхе интеграбилиты. Инитиатед бы тхис ешампле ще формулате тхе дисцрете инволутион тест фор мултидименсионал ечуатионс. Тщо Лаш паирс щхич аре нот цоннецтед бы аны цоњугатион трансформатион, шоулд бецоме цоњугате афтер импосинг тхе БЦ.

Апплы нощ тхе тест то лоок фор боундары цондитионс то тхе КП ечуатион

$$\begin{aligned} v_\tau + v_{xxx} - 6vv_x &= 3w_y, \\ w_x &= v_y, \end{aligned} \tag{28}$$

адмиттинг тхе Лаш паир

$$\phi_{xx} = i\phi_y + v\phi, \tag{29}$$

$$\phi_\tau = -4\phi_{xxx} + 6v\phi_x + 3(v_x + iw)\phi. \tag{30}$$

Тхе ечуатион (28) ис инвариант ундер тхе чанге $y \to -y$, $w \to -w$ анд бы тхис реасон тхе фоллощинг сыстем оф ечуатионс ис алсо а Лаш паир фор

тхе КП

$$\psi_{xx} = -i\psi_y + v\psi, \tag{31}$$

$$\psi_\tau = -4\psi_{xxx} + 6v\psi_x + 3(v_x - iw)\psi. \tag{32}$$

Пропоситион, [5]. Суппосе тхат тхере ешисц а дифферентиал оператор $M = aD_x^2 + bD_x + c$ суч тхат фор $y = 0$ фор аны солутион ψ оф тхе ечуатион (30) тхе фунцтион дефинед ас $\phi = M\psi$ ис а солутион то (32). Тхен оне оф тхе фоллощинг ечуатионс холдс

$$\begin{aligned} &1)\quad w|_{y=0} = 0,\\ &2)\quad (v_x - iw)|_{y=0} = 0,\\ &3)\quad (w_\tau - 2v_{xxy} + 6iv_{yyx} + 6v_x w - 6vw_x -\\ &\qquad -6iw^2 - 12cv_y)|_{y=0} = 0, \end{aligned} \tag{33}$$

щхере $c = c(x,\tau)$ ис а солутион оф тхе ечуатион $c_x = (-v_x + \frac{i}{2}w)|_{y=0}$. Тхе цорреспондинг оператор M ис оф тхе форм

$$\begin{aligned} &1)\quad M = 1,\\ &2)\quad M = D_x,\\ &3)\quad M = D_x^2 + c. \end{aligned} \tag{34}$$

Иф оне реплацес $\psi \leftrightarrow \phi$ оне гец оне море цонстраинт

$$4)\quad (v_x + iw)|_{y=0} = 0 \tag{35}$$

Интегралс оф мотион

То лоок фор интегралс оф мотион ще щилл усе тхе Греен идентитиес щхич аре ин тхис цасе ас фоллощс

$$\frac{d}{dx}(\phi_x\psi - \phi\psi_x) = i\frac{d}{dy}(\phi\psi) \tag{36}$$

анд

$$\frac{d}{d\tau}(\phi_x\psi - \phi\psi_x) = 4\frac{d}{dy}(\psi\phi_y - \psi_y\phi - \frac{i}{2}v\phi\psi + i\phi_x\psi_x). \tag{37}$$

Суппосе тхат еигенфунцтионс ψ анд ϕ аре дефинед ас фоллощс

$$\phi(x,y,\tau,k) = e^{-ik^2y + kx - 4k^3\tau}(1 + \sum_{j=1}^{\infty} k^{-j}\phi_j), \tag{38}$$

$$\psi(x,y,\tau,k) = e^{ik^2y-kx+4k^3\tau}(1+\sum_{j=1}^{\infty} k^{-j}\psi_j) \qquad (39)$$

фор $k \to \infty$, анд сатисфы тхе асымптотиц речуиременц

$$\phi e^{ik^2y-kx+4k^3\tau}, \psi e^{-ik^2y+kx-4k^3\tau} \to 1$$

фор $x \to -\infty$ анд фор $x \to +\infty$, респецтивелы, тхен тхе фунцтион $F(k)$

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty}(\phi_x\psi - \phi\psi_x - 2k)dy \qquad (40)$$

ис а генератинг фунцтион оф тхе цонсервед чуантитиес. Ацтуаллы, бы усинг тхе Греен идентитиес (36), (37) оне гец $\frac{\partial}{\partial\tau}F(k) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\tau}(\phi_x\psi - \phi\psi_x - 2k)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dy}(\phi\psi_y - \phi_y\psi + \frac{i}{2}v\phi\psi - i\phi_x\psi_x)dy = 0$.

Ечуатионс (29)-(32) адмиц оне море Греен идентиты

$$i\frac{\partial}{\partial\tau}(\phi\psi) = 4\frac{\partial}{\partial x}(\psi\phi_y - \phi\psi_y - \frac{i}{2}v\phi\psi + i\phi_x\psi_x), \qquad (41)$$

щхич аллощс оне то финд тхе генератинг фунцтион оф интегралс оф мотион фор тхе инитиал боундары валуе проблем он тхе халф-плане

$$F_1(k) = \int_{0}^{\infty}(\phi_x\psi - \phi\psi_x - 2k)dy + i\int_{-\infty}^{x}(\phi\psi - C(k))|_{y=0}ds, \qquad (42)$$

Хере тхе интегранд ин тхе фирст интеграл ис такен ат (x,y,τ,k), анд ин тхе сецонд – ат $(s,0,\tau,k)$. Реаллы, бы меанс оф тхе идентитиес (36), (37), (41) оне гец $\frac{\partial F_1}{\partial\tau} = 0$. Такинг тхе фирст цоеффициенц гивес

Пропоситион, [5]. Тхе КП ечуатион он тхе халф-плане $y > 0$, $-\infty < x < \infty$ щитх аны оф БЦ (33.1), (33.2), (35) пресервес тхе енергы

$$J_2 = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} v^2(x,y)dxdy = const$$

Список литературы

[1] А.Дегасперис, С.В.Манаков, П.М.Сантини, арШив:нлин.СИ/020530 в1.

[2] И.Т.Хабибуллин, А.Н.Вил'данов, Боундары цондитионс цонсистент щитх Л-А паирс, Процеединг оф тхе Интернатионал Цонференце МОГРАН 2000, Уфа, Руссиа, 27 Септембер-03 Оцтобер, 2000

[3] И.Т.Хабибуллин, Т.Г.Казакова, J.Пхыс.А : Матх. Ген. 34(2001) 10369

[4] И.Т.Хабибуллин, Тхеор. Матх. Пхыс., в.130, Њ, (2002) п.31-53. (Руссиан, бут транслатед бы АМС)

[5] И.Т.Хабибуллин, Е.В.Гудкова, Боундары цондитионс фор мултидименсионал интеграбле ечуатионс (ин пресс)